

Matematica III

Docente: Giulio Galise
CdL in Statistica, Economia, Finanza e Assicurazioni, A.A. 2021/2022

Esercitazione 9

Esercizio 1. Calcolare

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz$$

nei seguenti casi:

- (a) $f(x, y, z) = x \arctan(y) + \frac{e^{\frac{1}{\sin(z)}} \cos(z)}{\sin^3(z)}$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq \frac{1}{3}, 0 \leq y \leq 1, \frac{\pi}{4} \leq z \leq \frac{\pi}{2}\}$
- (b) $f(x, y, z) = e^{x+y+z}$, D è il tetraedro delimitato dai piani coordinati $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e dal piano $x + y + z = 1$
- (c) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$
- (d) $f(x, y, z) = (x^2 + y^2)^\alpha$, $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 3 - x - \frac{y}{2}\}$ ed α è un parametro positivo.

Esercizio 2. Calcolare

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz$$

Esercizio 3. Stabilire la validità della seguente disuguaglianza

$$\iiint_D e^{(x+y)^2+z} - 1 \, dx dy dz \geq \sin \left(\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \sin(x) \, dx dy \right)$$

essendo $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z \in [0, 2]\}$.

Esercizio 4. Calcolare la misura dell'insieme ottenuto dall'intersezione del cono $x^2 + y^2 \leq z^2$ e della palla $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3z$.

Esercizio 5. Calcolare, al variare di $\alpha > 0$, gli integrali generalizzati

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{1}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^\alpha} \, dx dy dz, \quad \iiint_{x^2+y^2+z^2 \geq 1} \frac{1}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^\alpha} \, dx dy dz.$$